



**UNIVERZITET U NIŠU**  
**FAKULTET ZAŠTITE NA RADU U NIŠU**



# **OSNOVI MAŠINSTVA**

**- PREZENTACIJA BR. 6 -**

**Dr Darko Mihajlov, vanr. prof.**

## **SADRŽAJ PREZENTACIJE**

- Središte (centar) sistema paralelnih sila;
- Težište krutog tela;
- Težište materijalne homogene zapremine;
- Težište materijalne homogene površine;
- Težište materijalne homogene linije;



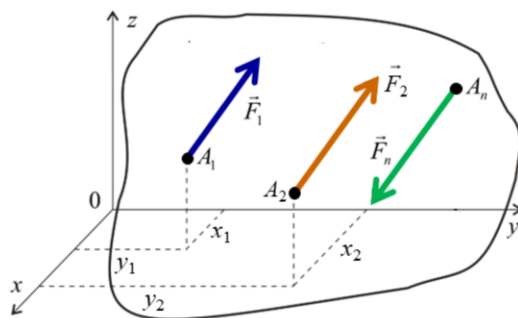
**OSNOVI MAŠINSTVA**

# STATIKA

## - Centar sistema paralelnih sila -

### SREDIŠTE (CENTAR) SISTEMA PARALELNIH SILA (1/4)

$$\vec{F}_i (i=1,2,\dots,n)$$



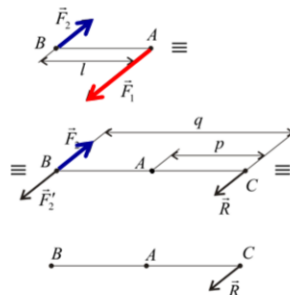
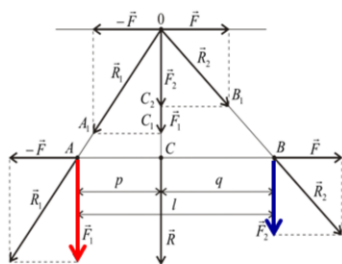
OSNOVI MAŠINSTVA

Razmatra se slučaj kada kruto telo napada sistem paralelnih sila  $F_i (i=1 \div n)$  u različitim napadnim tačkama  $A_i$  koje se ne mogu pomerati, tj. "vezane su".

# STATIKA

## - Centar sistema paralelnih sila -

### SREDIŠTE (CENTAR) SISTEMA PARALELNIH SILA (2/4)



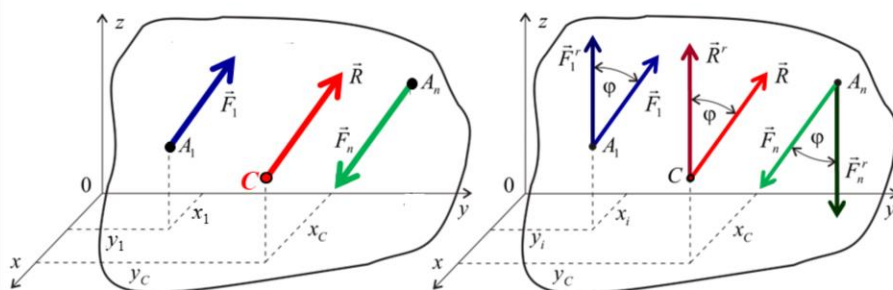
OSNOVI MAŠINSTVA

Ovakav sistem paralelnih sila se može svesti na rezultantu **R** postepenom primenom postupka za slaganje dve paralelne sile istog ili suprotnog smera.

# STATIKA

## - Centar sistema paralelnih sila -

### SREDIŠTE (CENTAR) SISTEMA PARALELNIH SILA (3/4)



$$M_y(\vec{R}^r) = \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i^r)$$

**OSNOVI MAŠINSTVA**

Tada postoji jedna nepomična (vezana) tačka u odnosu na telo kroz koju prolazi napadna linija rezultante bez obzira na pravac napadnih linija sistema paralelnih sila.

Nepomična tačka **C**, kroz koju prolazi napadna linija rezultante bez obzira na pravac napadnih linija tog sistema paralelnih sila, zove se **središte (centar) sistema paralelnih sila**.

Rotacijom napadnih linija svih sila sistema za isti ugao i u istom smeru oko napadnih tačaka, tako da budu paralelne sa nekom od koordinatnih osa (npr. sa Oz-osom), dobija se rotirani sistem paralelnih sila, čija rezultanta **R<sup>r</sup>** takođe prolazi kroz tačku **C**.

Odnosno, pri rotaciji datog sistema paralelnih sila za isti ugao i u istom smeru oko svojih napadnih tačaka, i rezultanta će se zarotirati za isti ugao i u istom smeru oko te nepomične tačke.

Na rotirani sistem paralelnih sila se primeni pravilo za moment rezultante za osu: Ako dati sistem sila ima rezultantu, tada je moment te rezultante za proizvoljnu osu jednak zbiru momenata svih sila tog sistema za istu osu (izraz dole desno na slajdu).

## STATIKA

### - Centar sistema paralelnih sila -

#### SREDIŠTE (CENTAR) SISTEMA PARALELNIH SILA (4/4)

$$M_y(\vec{R}^r) = \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i^r) \quad (\text{a})$$

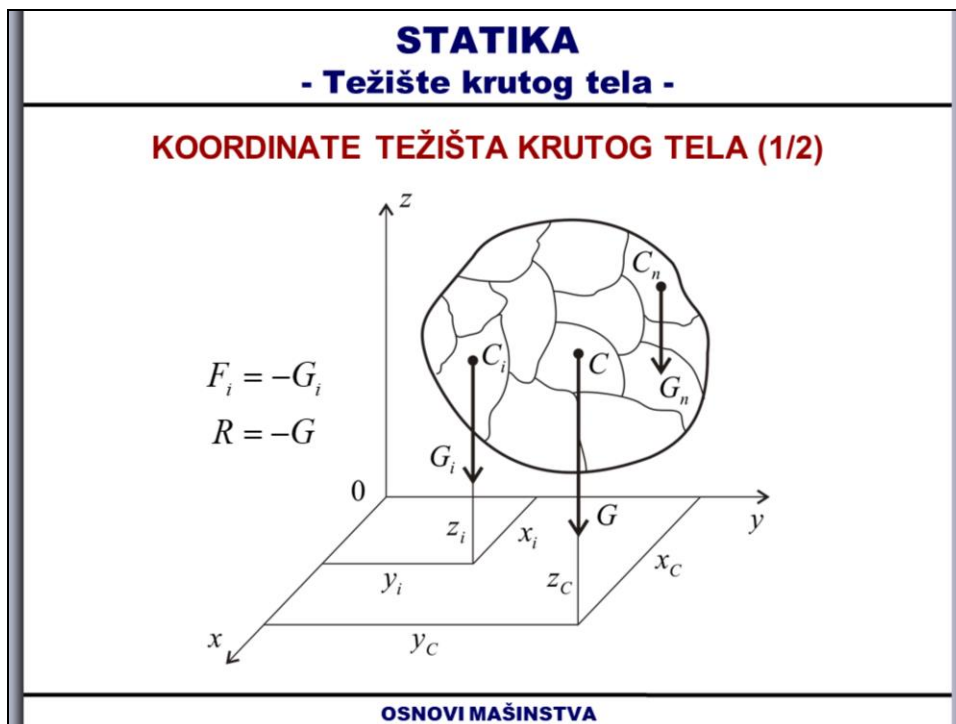
Na osnovu definicije momenta sile za osu:

$$\left. \begin{aligned} M_y(\vec{R}^r) &= -R^r \cdot x_c = -R \cdot x_c \\ M_y(\vec{F}_i^r) &= -F_i \cdot x_i \end{aligned} \right\} \rightarrow (\text{a}) \Rightarrow -R x_c = \sum_{i=1}^n -F_i x_i \Rightarrow$$

$$x_c = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n F_i x_i; \quad y_c = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n F_i y_i; \quad z_c = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n F_i z_i; \quad R = \sum_{i=1}^n F_i$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Koordinate središta sistema paralelnih sila (centra C) u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxyz su određene prikazanim izrazima.



Na svaku česticu tela koje se nalazi na Zemlji ili u njenom omotaču dejstvuju privlačne sile - sile Zemljine teže. Zbog malih dimenzija tela u odnosu na dimenziju Zemlje, ove sile se mogu smatrati paralelnim, vertikalnim, sa smerom naniže, ka centru Zemlje i "vezane" u napadnim tačkama tela. Te napadne tačke su težišta pojedinih čestica tela, odnosno konačnih delova tela.

Rezultanta privlačnih sila Zemljine teže, koje su paralelne i napadaju sve čestice tela, zove se **težina tela**.

**Težište tela** je ona tačka koja pri ma kom položaju tela ostaje uvek napadna tačka njegove težine.

Težište je tačka čiji se položaj ne menja prema krutom telu, a kroz koju prolazi napadna linija rezultante sila teže svih delića datog tela pri bilo kakvom položaju tela u prostoru.

Težište je tačka C - središte (centar) paralelnih sila Zemljine teže.

Problem određivanja težišta tela se svodi na određivanje položaja središta sistema vezanih vertikalnih paralelnih sila istog smera.

Položaj težišta tela može da se odredi pomoću koordinata u odnosu na usvojeni Dekartov koordinatni sistem.

Telo se podeli na konačne delove čija su težišta  $C_i$  i težine  $G_i$  poznati i zatim se primene izrazi za određivanje koordinata središta (centra) paralelnih sila, gde su  $F_i = -G_i$  i  $R = -G$ .

# STATIKA

## - Težište krutog tela -

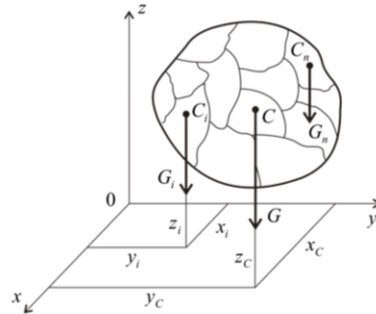
### KOORDINATE TEŽIŠTA KRUTOG TELA (2/2)

$$R = \sum_{i=1}^n F_i; \quad R = -G; \quad F_i = -G_i \Rightarrow G = \sum_{i=1}^n G_i;$$

$$x_C = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n F_i x_i \Rightarrow x_C = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n G_i x_i;$$

$$y_C = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n F_i y_i \Rightarrow y_C = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n G_i y_i;$$

$$z_C = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n F_i z_i \Rightarrow z_C = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n G_i z_i.$$



OSNOVI MAŠINSTVA

## **STATIKA**

### **- Težište zapremine -**

#### **KOORDINATE TEŽIŠTA MATERIJALNE HOMOGENE ZAPREME**

$$\frac{G_i}{G} = \frac{V_i}{V}, \quad \gamma = \frac{G_i}{V_i} = \frac{G}{V} \Rightarrow G = \gamma V, \quad G_i = \gamma V_i$$

**$\gamma$  - koeficijent srazmere - specifična težina  
(težina jedinice zapremine)**

$$x_C = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n V_i x_i \quad y_C = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n V_i y_i \quad z_C = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n V_i z_i$$

$$V = \sum_{i=1}^n V_i$$

**OSNOVI MAŠINSTVA**

Telo je homogeno ako se težine njegovih proizvoljnih delova odnose kao njihove zapremine:  $G/G_i = V/V_i$ , odakle sledi da je  $G_i/V_i = G/V$ .

$\gamma$  - koeficijent srazmere – specifična težina, odnosno težina jedinice zapremine.

Ako je homogeno telo sastavljeno iz  $n$  tela čije su pojedinačne zapremine i koordinate težišta tih zapremina poznate, tada je  $V = \sum V_i$ , gde su  $V_i$  - zapremina  $i$ -tog dela tela sa težištem u tački  $C_i(x_i, y_i, z_i)$  i  $V$  - zapremina datog tela, onda su koordinate težišta cele zapremine određene datim izrazima.

## STATIKA

### - Težište površine -

#### KOORDINATE TEŽIŠTA MATERIJALNE HOMOGENE POVRŠINE

$$\frac{G_i}{G} = \frac{A_i}{A}, \quad \gamma' = \frac{G_i}{A_i} = \frac{G}{A} \Rightarrow G = \gamma' A, \quad G_i = \gamma' A_i$$

$\gamma'$  - koeficijent srazmere - specifična težina površine  
(težina jedinice površine)

$$x_C = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n A_i x_i; \quad y_C = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n A_i y_i; \quad z_C = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n A_i z_i;$$

$$A = \sum_{i=1}^n A_i.$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Materijalnom površinom se smatra homogeno telo čija je jedna dimenzija veoma mala u odnosu na druge dve dimenzije.

Za koeficijent srazmere se uzima težina jedinice površine, tj. specifična težina površine  $\gamma'$ , tako da je  $G_i = \gamma' A_i$ , odnosno  $G = \gamma' A$ .

Ako se površina može podeliti na konačan broj površina čije su težine i koordinate težišta poznate, onda su koordinate težišta cele površine određene datim izrazima.

Ako materijalna površina leži u jednoj ravni, tada je položaj težišta određen dvema koordinatama. Težište se nalazi u toj ravni, pa je koordinata u pravcu ose koja je upravna na tu ravan jednaka nuli.

## STATIKA

### - Težište linije -

#### KOORDINATE TEŽIŠTA MATERIJALNE HOMOGENE LINIJE

$$\frac{G_i}{G} = \frac{L_i}{L}, \quad \gamma'' = \frac{G_i}{L_i} = \frac{G}{L} \Rightarrow G_i = \gamma'' L_i, \quad G = \gamma'' L$$

**$\gamma''$  - koeficijent srazmere se uzima - specifična težina materijalne linije (težina jedinice linije)**

$$x_C = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n L_i x_i \quad y_C = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n L_i y_i \quad z_C = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n L_i z_i$$

$$L = \sum_{i=1}^n L_i$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Materijalnom linijom se smatra homogeno telo čije su dve dimenzije veoma male u odnosu na treću dimenziju.

Za koeficijent srazmere se uzima težina jedinice linije, tj. specifična težina materijalne linije  $\gamma''$ .

Ako se linija može podeliti na konačan broj linija čije su dužine  $L_i$  i koordinate težišta  $C_i$  poznate, onda su koordinate težišta linije određene prikazanim izrazima.

Ako materijalna linija leži u jednoj ravni, tada je položaj težišta određen dvema koordinatama. Težište se nalazi u toj ravni, pa je koordinata u pravcu ose koja je upravna na tu ravan jednaka nuli.

## Kontrolna pitanja 6



1. Šta je težina tela, a šta težište tela?  
Napisati izraze za koordinate težišta tela.
2. Napisati izraze za koordinate težišta materijalne  
homogene zapremine.
3. Napisati izraze za koordinate težišta materijalne  
homogene površine.
4. Napisati izraze za koordinate težišta materijalne  
homogene linije.